PARAGRAAF 8.1 : RECURSIEVE EN DIRECTE FORMULE

LES 1 RIJEN EN RECURSIEVERGELIJKING

DEFINITIES : WAT IS EEN RIJ

Gegeven is de rij u = { 5,10,20,40 }.Voor deze rij geldt :

- Deze rij bestaat 4 termen (=getallen)
- $u_0 = 5$, $u_1 = 10$, $u_2 = 20$ en $u_3 = 40$ (dit is de vierde term!!)
- Let op : 1^e term = u_0 2^e term = u_1 etc.
- Je kunt deze rij eenvoudig op de GR berekenen door in te tikken
  (1) 5 enter
  (2) Ans · 2 en dan zo vaak als nodig op enter drukken

DEFINITIES : RECURSIEVERGELIJKING

- Recursievergelijking = { Een formule om de rij te beschrijven }
- Een formule van deze rij is :
  Volgende = 2·Vorige en startwaarde = 5
- De **recursievergelijking is dan**
  $u_n = 2 \cdot u_{n-1}$ en $u_0 = 5$

VOORBEELD 1

Gegeven is een rij met startwaarde 7 en iedere keer keer 2 en dan min 4 te doen.

a. Bereken de vierde term
b. Stel een recursievergelijking op.
c. Bereken u(3)

OPLOSSING 1

a. 7 enter → Ans·2 -4 → u(3) = 28

b. $u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 4$
$u_0 = 7$

c.
$n = 1 \rightarrow$ $u_1 = 2 \cdot u_0 - 4 = 2 \cdot 7 - 4 = 10$
$n = 2 \rightarrow$ $u_2 = 2 \cdot u_1 - 4 = 2 \cdot 10 - 4 = 16$
$n = 3 \rightarrow$ $u_3 = 2 \cdot u_2 - 4 = 2 \cdot 16 - 4 = 28$

LES 2 EEN DIRECTE FORMULE EN DE GR

DEFINITIES : DIRECTE FORMULE

- Directe formule = { een formule waarmee je meteen u(30) kunt berekenen }
- In de directe formule staat ALLEEN de letter n { dus geen u(n-1) }
- Voorbeeld van een directe formule is $u(n) = 5 \cdot 2^{n-1}$.
  Deze bevat geen u(n-1) vandaar een directe formule.
  Je kunt nu direct bijv. u(11) uitrekenen : $u(11) = 5 \cdot 2^{11-1} = 5120$

VOORBEELD 1

Van een rij is de formule $u_n = n^2 - 3n$.

a. Is dit een recursievergelijking of een directe formule ? Waarom ?
b. Bereken u(6).
c. Bepaal de formule voor u(n-1).
d. Stel een recursievergelijking op van u(n).
e. Bereken vanaf welke term de formule van u(n) groter is dan 1000.

OPLOSSING 1

a. Deze bevat geen u(n-1) vandaar een directe formule.
b. $u_6 = 6^2 - 3 \cdot 6 = 18$
c. $u(n-1) = (n-1)^2 - 3(n-1)$
$u(n-1) = n^2 - 2n + 1 - 3n + 3$
$u(n-1) = n^2 - 5n + 4$.

d. $u(n) - u(n-1) = n^2 - 3n - (n^2 - 5n + 4) = -3n + 5n - 4$
$u(n) - u(n-1) = 2n + 4$
$u(n) = u(n-1) + 2n + 4$

e. Dit moet je op de GR doen :

(1) Mode : $Func \rightarrow Seq$
(2) Y = : nMin = 0
: u(n) = $n^2 - 3n$ { de n is de x-knop }
: u(nMin) = 0

Gebruik de Table. Je ziet dan

n	u_n
33	990
34	1054

Dus bij n = 34 dus de 35^e term.

PARAGRAAF 8.2 : REKENKUNDIGE EN MEETKUNDIGE RIJ

LES 1 : REKENKUNDIGE RIJ

DEFINITIE

Er zijn twee soorten rijen die vaak terugkomen

1. Rekenkundige rij = { Iedere keer een getal erbij tellen }
2. Meetkundige rij = { Iedere keer met een getal vermenigvuldigen }

REKENKUNDIGE RIJ

Voor de rekenkundige rij gelden een aantal formules

(1) De recursievergelijking : $u(n) = u(n-1) + v$ waarbij v een getal is.

(2) De directe formule : $u(n) = u(0) + n \cdot v$

VOORBEELD 1

Gegeven is de rij u = { 9,13,17,….}

a. Stel een recursievergelijking op en bereken u_4.

b. Stel de directe formule op

c. Bereken u_{58}.

OPLOSSING 1

a. u(n) = u(n-1) + 4 en u(0) = 9

De GR

(1) nMin = 0

u(n) = u(n-1) + 4

u(nMin) = 9

(2) Table : u(4) = 25

b. u(n) = 9 + n·4 = 4n + 9

c. u(58) = 4·58 + 9 = 241

OPMERKING

Als de rij niet begint met u(0) , maar met bijv u(3), dan wordt de directe formule :
u(n) = u(0) + v · (n-3).

LES 2 : MEETKUNDIGE RIJ

DEFINITIE

Meetkundige rij = { Iedere keer met een getal vermenigvuldigen }

Voor de meetkundige rij gelden een aantal formules

(1) De recursievergelijking : $u(n) = r \cdot u(n-1)$, waarbij r een getal is.

(2) De directe formule : $u(n) = u(0) \cdot r^n$.

VOORBEELD 1

Gegeven is de rij u = { 3,6,12,….}

a. Stel een recursievergelijking op en bereken u_4.

b. Stel de directe formule op en bereken u_{10}.

OPLOSSING 1

a. $u(n) = 2 \cdot u(n-1)$ en $u(0) = 3$

De GR

(1) nMin = 0

$u(n) = 2 \cdot u(n-1)$

u(nMin) = 3

(2) Table : u(4) = 48

b. $u(n) = u_0 \cdot r^n = 3 \cdot 2^n$

$u(10) = 3 \cdot 2^{10} = 3072$

OPMERKING

Als de rij niet begint met u(0) , maar met bijv u(3), dan wordt de directe formule :

$u(n) = u(0) \cdot r^{n-3}$

LES 3 : FORMULE OPSTELLEN MET TWEE TERMEN

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de termen $u_3 = 256$ en $u_7 = 625$. Bepaal de recursievergelijking als :

a. Dit een rekenkundige rij is.

b. Dit een meetkundige rij is.

OPLOSSING 1

a. (1) In vier stappen van 256 naar 625, dus :

$$4v = 625 - 256 = 369 \rightarrow v = \frac{369}{4} = 92{,}25$$

(2) Startwaarde (u_0) is 3 stappen terug van u_3 , dus

$$u_0 = 256 - 3 \times 92{,}25 = -20{,}75$$

(3) Recursievergelijking

$u_n = u_{n-1} + 92{,}25$ en $u_0 = -20{,}75$

b. (1) In vier stappen van 256 naar 625, dus :

$$256v^4 = 625$$

$$v^4 = \frac{625}{256} \rightarrow v = \sqrt[4]{\frac{625}{256}} = 1{,}25$$

(2) Startwaarde (u_0) is 3 stappen terug van u_3 , dus

$$u_0 = 256 : 1{,}25^3 = 131{,}072$$

(3) Recursievergelijking

$u_n = 1{,}25u_{n-1}$ en $u_0 = 131{,}072$

PARAGRAAF 8.3 : SOMRIJEN

DEFINITIE SOMRIJ

- $S_n = \{\, Som\ van\ de\ eerste\ (n+1)\ termen\ van\ de\ rij\ u \,\} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
- $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

VOORBEELD 1

Gegeven is de recursievergelijking u(n) = u(n-1) + 4 en u(0) = 9

a. Bereken $\sum_{i=0}^{3} u_i$

b. Bepaal de som van de eerste 12 termen.

OPLOSSING 1

a. $\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 9 + 13 + 17 + 21 = 60$

b. Omdat $s_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$ en $s_2 = u_0 + u_1 + u_2$ geldt ook dat :
$s_3 = s_2 + u_3$
Algemeen : s(n) = s(n-1) + u(n)

De oplossing

(1) De eerste 12 getallen is u(0) t/m u(11) !!
Dus we moeten S_{11} berekenen.

(2) De GR gebruiken. Je hebt twee recursievergelijkingen nodig :
nMin = 0
u(n) = u(n-1) + 4
u(nMin) = 9

v(n) = v(n-1) + u(n-1) + 4 { v(n-1) + de recursievgl van u(n) }
v(nMin) = 9 { v(0) = u(0) = 9 }

(3) Table : v(11) = 372

VOORBEELD 2

a. Bereken $\sum_{i=0}^{2} 3k + 2$

b. Bereken $\sum_{i=0}^{8} 3k + 2$

OPLOSSING 2

a. $\sum_{i=0}^{2} 3k + 2 = (3 \cdot 0 + 2) + (3 \cdot 0 + 2) + (3 \cdot 0 + 2) = 2 + 5 + 8 = 15$

b. Ook dit kan gewoon met de GR.

nMin = 0

u(n) = 3n + 2

u(nMin) = 2

v(n) = v(n-1) + 3n + 2 { v(n-1) + de recursievgl van u(n) }

v(nMin) = 2 { v(0) = u(0) = 9 }

Table : v(8) = 126

PARAGRAAF 8.4 TOENAMEDIAGRAM

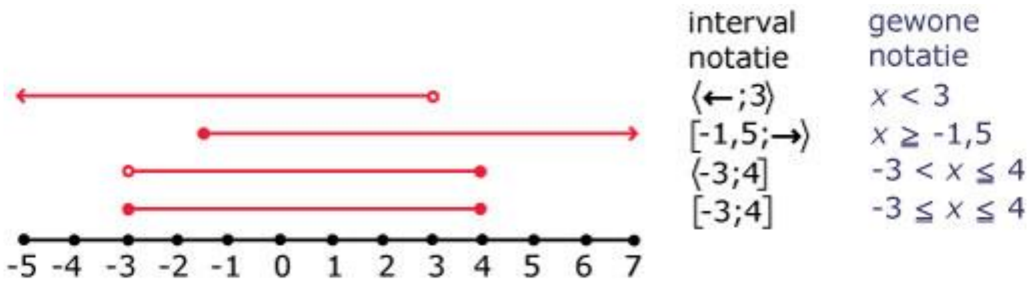
LES 1 INTERVAL / GETALLENLIJN / X-NOTATIE

VOORBEELD 1

Geef op drie manieren (getallenlijn, intervalnotatie en x-notatie) de volgende 4 intervallen weer :

a. x is kleiner dan 3
b. x is groter of gelijk aan -1,5
c. x is groter dan -3 en kleiner of gelijk aan 4
d. x is groter of gelijk aan -3 en kleiner of gelijk aan 4

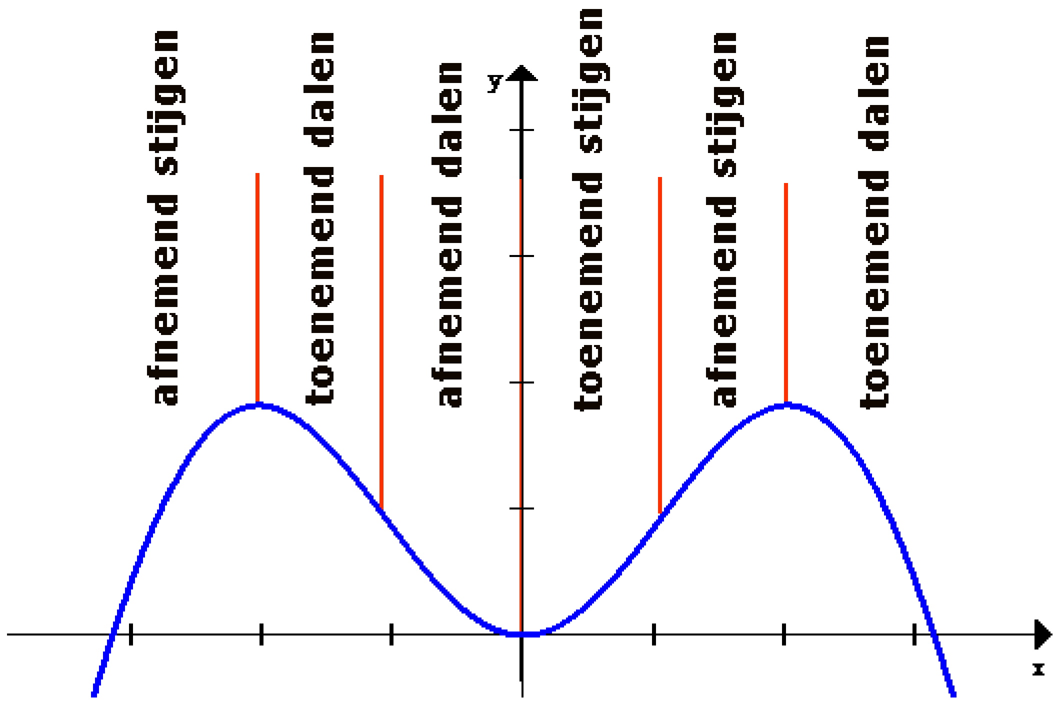
OPLOSSING 1



VOORBEELD 2

Gegeven is onderstaande grafiek. Geef duidelijk aan op welk gebied de grafiek :
Toenemend stijgend
Afnemend stijgend
Toenemend dalend
Afnemend dalend is.

OPLOSSING 2



LES 2 TOENAMENDIAGRAM TEKENEN

VOORBEELD 1

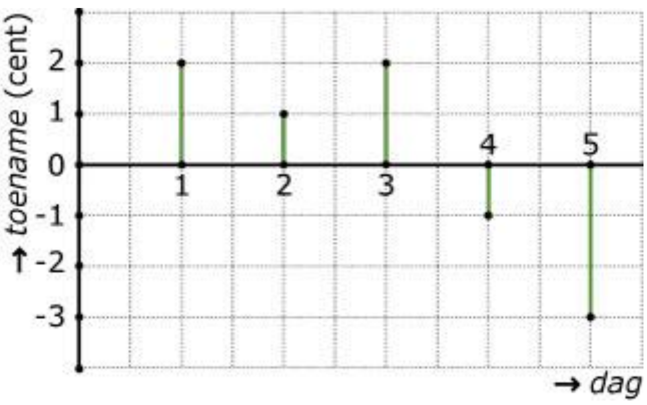
Hier zie je de grafiek van het verloop van de koers van de dollar. Maak er een toenamediagram bij met stapgrootte 1 dag. Geef de prijs in centen nauwkeurig.

Maak eerst een tabel met de toenames

dag	0	1	2	3	4	5
Koers (centen)	117	119	120	122	121	118
toename Δ Koers		2	1	2	-1	-3

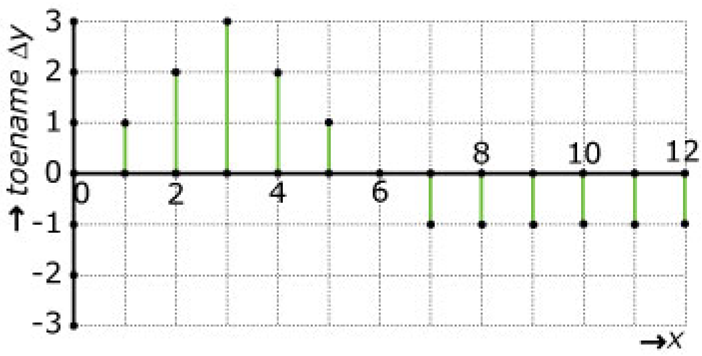
OPLOSSING 1

Dit geeft het toenamediagram :



LES 3 GRAFIEK MAKEN UIT EEN TOENAMENDIAGRAM

VOORBEELD 1



Hier zie je het toenamediagram van de grafiek van een functie waarvan de grafiek door (4,7) gaat.

a. Maak nu een grafiek van deze functie.

b. Geef het grootste interval aan waar de grafiek afnemend stijgend is.

OPLOSSING 1

a. Maak eerst een tabel met alle bekende gegevens :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y					7								
Δy		1	2	3	2	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Vul alles in en je krijgt :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	-1	0	2	5	7	8	8	7	6	5	4	3	2
Δy		1	2	3	2	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1

b. Van 3 naar 5 wordt de helling steeds minder positief (tot x=6, want daar is hij nul en niet meer stijgend).
Dus < 3 , 5 > .

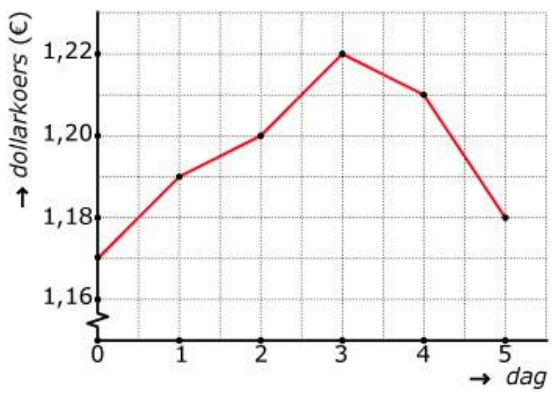
PARAGRAAF 8.5 DIFFERENTIEQUOTIËNTEN

DEFINITIE DIFFERENTIEQUOTIËNT

- Differentiequotiënt = { Gemiddelde helling }
- Differentiequotiënt op interval [x_a , x_b] = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$
- Helling = Snelheid (bijv. m/s)

VOORBEELD 1

Gegeven is de grafiek :



a. Bereken het differentiequotiënt op $[1,4]$ in centen nauwkeurig

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 3$.

b. Bereken het differentiequotiënt op $[2,6]$

c. Bereken de gemiddelde helling / snelheid op $[-4,-1]$

OPLOSSING 1

a. $x = 1 \rightarrow y = 119$ cent

$x = 4 \rightarrow y = 121$ cent

Differentiequotiënt op interval [1,4] = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{121-119}{4-1} = \frac{2}{3}$

b. $x = 2 \rightarrow y = 7$

$x = 6 \rightarrow y = 39$

Differentiequotiënt op interval [2,6] = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{39-7}{6-2} = \frac{32}{4} = 8$

c. $x = -4 \rightarrow y = 19$ en $x = -1 \rightarrow y = 4$

Gemiddelde helling / snelheid op [-4,-1] = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-19}{-1--4} = \frac{-15}{3} = -5$

OPMERKING

Differentiequotiënt is eigenlijk de r.c. van die lijn.